ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL
SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.
VII. KÖTET. V. SZÁM. 1879.

A MÁSODFOKÚ FELÜLETEK ELMÉLETÉHEZ.

HUNYADY JENŐ
LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1879. június 23.)

Ára 20 kr.

BUDAPEST, 1879.
A M. TUD. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.
(Az akadémia épületében.)

A

MÁSODFOKÚ FELÜLETEK

ELMÉLETÉHEZ.

HUNYADY JENŐ

LEV. TAGTÓL.

(Előadta a III. osztály ülésén 1879. június 23.)

BUDAPEST, 1879.

A M. T. AKADÉMIA KÖNYVKIADÓ-HIVATALA.

(Az Akadémia épületében.)

Budapest, 1879. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdájából.

A másodfokú felületek elméletéhez.

Hunyady Jenő, lev. tagtól.

(Előadta a III. osztály ülésén 1879. június 23-án.)

Több mint százhúsz év előtt Euler*) indította meg azon vizsgálatokat, melyek a másodfokú felületek általános tulajdonságaira vonatkoznak és ebbéli vizsgálataiban a másodfokú felületeknek öt főfaját ismeré fel. Az ily módon megindított kutatásokat leginkább Monge és jelentékeny számú tanítványai fejlesztették czéljuk elérésére majd a tiszta geometriai, majd pedig az analytikai módszereket használták. Ezen buvárokhoz csatlakoztak végre az új és a jelen kor geometrái.

Ha mindjárt a több mint egy századon át működő geometrák fáradhatlan buvárlatainak a másodfokú felületekre vonatkozólag számos elméletet is köszönünk, melyek által a másodfokú felületek elmélete több irányban teljesen befejezettnek tekinthető, mégis e felületek általános elméletében egy lényeges hézagot látunk, melyet pótolni a geometráknak még mindeddig nem sikerült.

Az említett hézag pótlása egy oly tétel felkeresésében áll, mely, a mennyire csak lehet könnyen és egyszerűen mutatná ki azon összefüggést, mely a másodfokú felület tíz pontja között létezik.

Ha meggondoljuk, hogy a másodfokú felület kilencz pont által van meghatározva, úgy könnyű belátni, hogy a kérdéses tétel ezen felületek elméletében a legfontosabb életkérdés szerepét játsza. A brüsseli akadémia a kérdésben forgó

---

*) Lásd e tekintetben : Euler : Introductio in analysin infinitorum (1748) czímű munkájának német fordítását Michelsentől : 2-tes Buch, Anhang. V. Kapitel 545—564. ll.

tétel rendkivüli fontosságát kellőleg méltányolva, már 1825-ben tűzte ki a következő pályakérdést :

»Kerestetik a másodfokú felületekre nézve egy tétel, mely analogonját képezze a Pascal-féle tételnek és a másodfokú felület tíz pontja közötti összefüggést tartalmazza.«

E pályakérdésre a brüsseli akadémiához felelet nem érkezvén, az e kérdést újból oly módositással tűzte ki, hogy csak egy oly tételt kivánt, mely a Pascal-féle tételnek analogonját képezze. Ez újabb pályakérdés megoldója Chasles úr volt.*)

A brüsseli akadémia különösen az 1825-ben kitüzött pályakérdése által a geometrák figyelmét a másodfokú felületek azon tételeire vonta, melyek az e felületnek tíz pontja közötti összefüggésre vonatkoznak, és ha mindjárt a geometrák ebbéli buvárlatai még mai napig sem értek czélt, úgy mind annak daczára el kell ismernünk, hogy a brüsseli akadémiának ezen pályakérdése serkentette a geometrákat az ilynemű tételek felkeresésére. Az idő óta több a szóban forgó kérdéssel a legszorosabb összefüggésben álló kérdés merült fel, melyek közül némelyek már végkép el is döntettek. Ez utóbbiak közül azok, melyek a másodfokú felületekre vonatkoznak, a következő három osztályba sorozhatók :

1) A másodfokú felületeknek olyan tétele kerestetik, a mely analogonját képezze a kúpszeletek elméletében előforduló annak hat pontja közötti összefüggésre vonatkozó tételnek, a nélkül, hogy a kérdéses analogon a másodfokú felület tíz pontja közötti összefüggésre vonatkoznék.**)

2) A másodfokú felület szerkesztése kilencz adott pontból.***)

*) A brüsseli pályakérdéseket illetőleg Chasles : »Aperçu historique etc.« czímű munkájában az V. fej. 49. és 50. alatti czikkekre utalunk.

**) Chasles ugyanott : Note XXXII. — Paul Serret : Note sur une classe particulière de décagone gauche inscriptible à l'ellipsoide és Sur une nouvelle analogie aux théorèmes de Pascal et de Brianchon« Comptes rendus 82. köt. 162—165. és 208—210. ll.

***) Hesse Crelle-Borchardt Journal für reine und angewandte Mathematik 24. köt. 36. l. — Seydewitz Grunert Archiv Thl. 9, 158. l. és Thl. 17, 217. l. — Schröter : Crelle-Borchardt Journal sat. 62. köt. 251. l. — Steiner : Ugyanott 68. köt. 191. l.

3) A másodfokú felület tíz pontja között fennálló összefüggés.

Az utóbbi kérdések sorába tartozik Sautreaux úrnak egy tétele, melynek megértésére még a következőt kell előre bocsátanunk:

»Az $SABC$ háromélben az SA,... éleknek szembenfekvő lapsíkjait α, β, γ-val jelölvén, ha a másodfokú felületet és a háromélt tekintjük, úgy az α, β, γ lapsíkok a másodfokú felületet kúpszeletekben metszik; az α, β és α, γ kúpszeletek által két kúp van meghatározva, mely két kúp egymást az α kúpszeleten kivül még egy másik γ' kúpszeletben metszi, melynek síkjában az SA él fekszik, azaz: a β, γ és γ' síkok egy egyenesben találkoznak.«

Ezt előre bocsátva, Sautreaux úr azon tétele, mely a másod fokú felület tíz pontja közötti összefüggésre vonatkozik, a következő:

»Ha a másod fokú felületen két kúpszeletet veszünk tekintetbe, (mely nyolcz feltétellel egyenértékű) és két pontot, és ha az említett kúpszeletek síkjait α és β-val, a két ponton keresztűl menő tetszőleges síkot pedig γ-val jelöljük, valamint az előbbi tételben defineált kúpokat megszerkesztjük, úgy azok még egymást γ'-ban metszik s az előbbi tétel szerént β, γ és γ' síkok egy egyenesben találkoznak; a γ és γ' síkok metszésvonala egy állandó ponton megy keresztűl, melyben t. i. a β sík a két adott pont által meghatározott egyenestől átdöfetik. Ha már most a γ síkot az állandó egyenes körül forgatjuk, úgy vele egyidejűleg γ' is változik, valamint γ, γ' egyenes is, de ez utóbbi mindig a β síkban marad és az előbb említett állandó ponton menvén keresztül azt mondhatjuk, hogy a γ, γ' egyenes az állandó pont körül forogva, a β síkot írja le.*)

Ha Sautreaux úrnak ezen utóbbi complikált tételétől eltekintünk, úgy a 3-dik osztályba tartozó tételek eddig

*) »Démonstration de deux théorèmes analogues en géométrie de l'espare à celui de Pascal en géométrie plane, essai de réponse à une question posée, en 1825. par l'académie de Bruxelles«. Bulletins de l'acad. roy. des ssienses etc. de Belgique 2-me sér. T. 45, 1878. 426—430. ll.

csak is Paul Serret úr következő tételei által vannak képviselve:*)

I. Ha a másodfokú felület tíz pontját egyenlően öt-öt pontra osztjuk fel, úgy minden osztály pontjai egy térbeli ötszögöt határoznak meg, mely térbeli ötszögök egy másik másodfokú felületre egyidejüleg conjugáltak.

II. Ha a másodfokú felület tíz pontját négy és hat pontra osztjuk fel, úgy az ezek által meghatározott tetraéder és octaéder egy másik másodfokú felületre nézve egyidejűleg conjugáltak.

És megfordítva stb.

Az I. alatti tétel megfordítását még a következő alakban mondhatjuk ki:

III. Tíz pont öt és ötre felosztva két térbeli ötszögöt határoz meg, ha ezen ötszögökben az átlók végpontjainak megfelelő szögök síkjai egy másodfokú felületre nézve egyidejűleg conjugáltak, ugy a tíz pont egy másodfokú felületen fekszik.

A másodfokú felületek tíz pontja közötti összefüggésre vonatkozó tételek mindössze is csak az I. II. III. alatti tételekre szorítkoznak. Legyen szabad e helyen e tételeket a kúpszelet hat pontja közötti összefüggésére vonatkozó tételeknek történelmi fejlődésével párhuzamba állítani.

A geometriának azon tételei, melyek a kúpszelet hat pontja közötti összefüggésre vonatkoznak, három osztályba sorozhatók, melyek közül az elsőbe azon tételek tartoznak, melyek egy bizonyos viszony állandóságát fejezik ki, mi a Pappus, Desargues, Carnot és Chasles tételeiben történik. A második osztályba azon tételek sorozhatók, melyekben a kúpszelet hat pontja között fennálló összefüggés egy egyenestől tétetik függővé, mint ezt Pascal, Newton, Mac-Laurin és Braikenridge tételeiben látjuk. Végre a harmadik osztályba tartozó tételek a kúpszelet hat pontja között fennálló viszonylat egy másik kúpszelettől tétetik függővé, mint Hesse tételében és a következőben:

---

*) Paul Serret: Géométrie de direction. 444. l. 388. czikk. Ezentúl Serret ezen munkáját G. d. D. alatt idézzük.

»Ha két háromszög ugyanazon kúpszeletbe be van írva, úgy a háromszögök oldalai egy másik kúpszeletet érintenek.«

A felfedezés sorrendje megfelel az itteni felsorolásnak, megjegyezvén, hogy az első két osztályba tartozó tételek Carnot és Chasles tételének kivételével, századokkal előzték meg a harmadik osztályba tartozó tételeket.

Csak csodálkozásunknak vélünk kifejezést adni, ha itt felemlítjük, hogy az eddig ismeretes, a másodfokú felület tíz pontja között fennálló tételek ez összefüggést egy másik másodfokú felülettől teszik függővé és így constatáljuk, hogy a másodfokú felületek elméletében a tíz pont között fennálló öszszefüggésre vonatkozó tételek a kúpszeletek tanában előforduló hasonló czélú tételekkel szemben, történelmi fejlődésüket a megfordított sorrendben kezdik meg.

A II. alatti tétel megfordítása, valamint a III. alatti tétel a másodfokú felület tíz pontja között fennálló összefüggést különböző alakokban tüntetik ki, mely összefüggést még egyébb nevezetes alakokban lehet előállítani pusztán analytikailag.

A következő vizsgálatok tárgyát képezi a másod fokú felület tíz pontja között fennálló összefüggés különböző alakjainak előállítása és e különböző alakoknak egymás közötti összefüggésének kipuhatolása.

I.

1. Jelöljük az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 pontok közöl az i pontnak homogén viszonyösszrendezőit rendre

$$x_i,\ y_i,\ z_i,\ p_i\text{-vel}\ldots.(a)$$

úgy az i, k és l pontok által meghatározott sík homogén síkösszrendezői a következők :

$$\left.\begin{aligned}
\begin{vmatrix} y_i & z_i & p_i \\ y_k & z_k & p_k \\ y_l & z_l & p_l \end{vmatrix} &= \xi_{ikl} &\qquad \begin{vmatrix} p_i & x_i & y_i \\ p_k & x_k & y_k \\ p_l & x_l & y_l \end{vmatrix} &= \zeta_{ikl} \\
-\begin{vmatrix} z_i & p_i & x_i \\ z_k & p_k & x_k \\ z_l & p_l & x_l \end{vmatrix} &= \eta_{ikl} &\qquad -\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix} &= \pi_{ikl}
\end{aligned}\right\}\ldots.(b)$$

végre legyen

$$\begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ x_k & y_k & z_k & p_k \\ x_l & y_l & z_l & p_l \\ x_m & y_m & z_m & p_m \end{vmatrix} = (iklm) \ldots \quad (c).$$

2. Feltéve, hogy a másod fokú felület egyenlete a következő:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}p^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xp + $$
$$+ 2a_{23}yz + 2a_{24}yp + 2a_{34}zp = 0, \ldots (1).$$

úgy az i pont akkor fekszik a másod fokú felületen, ha:

$$a_{11}x_i^2 + a_{22}y_i^2 + a_{33}z_i^2 + a_{44}p_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + 2a_{13}x_iz_i +$$
$$2a_{14}x_ip_i + 2a_{23}y_iz_i + 2a_{24}y_ip_i + 2a_{34}z_ip_i = 0,$$

a mely egyenletből, ha abban i helyett 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 tétetik, azon feltéti egyenleteket nyerjük, melyeknél fogva mind a tíz pont az (1) alatti felületen fekszik. Ha pedig a tíz egyenletből a bennök vonalosan és egyméretűen előforduló $a_{11} \ldots . 2a_{12} \ldots . 2a_{34}$ mennyiségeket kiküszöböljük, azon feltéti egyenletet nyerjük, melynél fogva mind a tíz pont az (1) alatti másod fokú felületen fekszik.

A következő jelölés használata mellett:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & p_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & x_1p_1 & y_1z_1 & y_1p_1 & z_1p_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & p_2^2 & x_2y_2 & x_2z_2 & x_2p_2 & y_2z_2 & y_2p_2 & z_2p_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & p_3^2 & x_3y_3 & x_3z_3 & x_3p_3 & y_3z_3 & y_3p_3 & z_3p_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & p_4^2 & x_4y_4 & x_4z_4 & x_4p_4 & y_4z_4 & y_4p_4 & z_4p_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & p_5^2 & x_5y_5 & x_5z_5 & x_5p_5 & y_5z_5 & y_5p_5 & z_5p_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & p_6^2 & x_6y_6 & x_6z_6 & x_6p_6 & y_6z_6 & y_6p_6 & z_6p_6 \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & p_7^2 & x_7y_7 & x_7z_7 & x_7p_7 & y_7z_7 & y_7p_7 & z_7p_7 \\ x_8^2 & y_8^2 & z_8^2 & p_8^2 & x_8y_8 & x_8z_8 & x_8p_8 & y_8z_8 & y_8p_8 & z_8p_8 \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & p_9^2 & x_9y_9 & x_9z_9 & x_9p_9 & y_9z_9 & y_9p_9 & z_9p_9 \\ x_0^2 & y_0^2 & z_0^2 & p_0^2 & x_0y_0 & x_0z_0 & x_0p_0 & y_0z_0 & y_0p_0 & z_0p_0 \end{vmatrix} \ldots\ldots (d)$$

$$\Delta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

egyenlet fejezi ki, hogy az 1, 2....0 pontok a másodrendű felületen feküsznek.

3. Ha az 1, 2, 3, 4 pontok által meghatározot tetraéder lapsíkjainak egyenleteit a következőképen jelöljük:

$$(234) = 0, \ (134) = 0, \ (124) = 0, \ (123) = 0,$$

úgy ismeretes, hogy a tetraéder csúcsait tartalmazó másodfokú felületnek az egyenlete a következő alakú :

$$\lambda_1 (123)(124) + \lambda_2 (123)(134) + \lambda_3 (123)(234) + \lambda_4 (124)(134) + \lambda_5 (124)(234) + \lambda_6 (134)(234) = 0^{*}) \ldots\ldots (3).$$

Ha pedig még kifejezzük, hogy az 5, 6, 7, 8, 9, 0. pontok is e másodrendű felületen feküsznek, úgy a (c) alatti jelölések használata mellett, a következő hat feltéti egyenletet nyerjük :

$$\lambda_1 (1235)(1245) + \lambda_2 (1235)(1345) + \lambda_3 (1235)(2345) + \lambda_4 (1245)(1345) + \lambda_5 (1245)(2345) + \lambda_6 (1345)(2345) = 0.$$
$$\lambda_1 (1236)(1246) + \lambda_2 (1236)(1346) + \lambda_3 (1236)(2346) + \lambda_4 (1246)(1346) + \lambda_5 (1246)(2346) + \lambda_6 (1346)(2346) = 0.$$
$$\lambda_1 (1237)(1247) + \lambda_2 (1237)(1347) + \lambda_3 (1237)(2347) + \lambda_4 (1247)(1347) + \lambda_5 (1247)(2347) + \lambda_6 (1347)(2347) = 0.$$
$$\lambda_1 (1238)(1248) + \lambda_2 (1238)(1348) + \lambda_3 (1238)(2348) + \lambda_4 (1248)(1348) + \lambda_5 (1248)(2348) + \lambda_6 (1348)(2348) = 0.$$
$$\lambda_1 (1239)(1249) + \lambda_2 (1239)(1349) + \lambda_3 (1239)(2349) + \lambda_4 (1249)(1349) + \lambda_5 (1249)(2349) + \lambda_6 (1349)(2349) = 0.$$
$$\lambda_1 (1230)(1240) + \lambda_2 (1230)(1340) + \lambda_3 (1230)(2340) + \lambda_4 (1240)(1340) + \lambda_5 (1240)(2340) + \lambda_6 (1340)(2340) = 0.$$

a melyekből a λ mennyiségek kiküszöbölése után azon feltéti egyenletre jövünk, melynél fogva a tíz pont a másodrendű felületen fekszik. A következő jelölés használata mellett :

---

*) A másod fokú felületeknek az egyenlete Bobilliertől adatott ezen alakban (Lásd. G. d. D. 52. l.)

$$\Delta_{1234}=\left|\begin{matrix}(1235)(1245), & (1235)(1345), & (1235)(2345), & (1245)(1345), & (1245)(2345), & (1345)(2345)\\ (1236)(1246), & (1236)(1346), & (1236)(2346), & (1246)(1346), & (1246)(2346), & (1346)(2346)\\ (1237)(1247), & (1237)(1347), & (1237)(2347), & (1247)(1347), & (1247)(2347), & (1347)(2347)\\ (1238)(1248), & (1238)(1348), & (1238)(2348), & (1248)(1348), & (1248)(2348), & (1348)(2348)\\ (1239)(1249), & (1239)(1349), & (1239)(2349), & (1249)(1349), & (1249)(2349), & (1349)(2349)\\ (1230)(1240), & (1230)(1340), & (1230)(2340), & (1240)(1340), & (1240)(2340), & (1340)(2340)\end{matrix}\right| \quad \ldots (e)$$

$$\Delta_{1234}=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

egyenlet fejezi ki a szóban forgó feltételt.

A miként a másod rendű felület egyenletét más négy pont által meghatározott tetraéderre vonatkoztatjuk, akként a kérdéses feltételt más alakban nyerjük. Ennélfogva a (4) alatti egyenlet, mint $\frac{10.\ 8.\ 9.\ 7}{2.\ 3.\ 4.\ 5}=210$ alakilag különböző egyenlet képviselője lép fel.

4. Ha az 1, 2,.....0 pontok közül az 1, 2, 3, 4, 5, 6. pontokat kiválasztjuk, úgy azokat az ezen pontok által meghatározott hexagonalis octaéder csúcsainak tekinthetjük. Ha ezen octaéderben az általellenben fekvő lapsíkok egyenleteit a következőképen jelöljük :

$$(123)=0,\ (134)=0,\ (145)=0,\ (125)=0.$$
$$(456)=0,\ (256)=0,\ (236)=0,\ (346)=0.$$

úgy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokon keresztülmenő másodrendű felület egyenletét a következő alakban írhatjuk :

$$\lambda_1\,(123)\,(456)+\lambda_2\,(134)\,(256)+\lambda_3\,(145)\,(236)+\lambda_4\,(125)\,(346)=0^{*)} \; \ldots . \quad (5)$$

---

*) A másodrendű felületeknek az egyenlete ezen alakban, a mint vélem Thomas Weddletől adatott először. The Cambridge and Doublin math. Journal. (V. köt. 66. l.), G. d. D. 52. l.

ha azután kifejezzük, hogy a 7, 8, 9, 0. pontok is e másodrendű felületen feküsznek, úgy a következő négy feltételt nyerjük :

$$\lambda_1(1237)(4567)+\lambda_2(1347)(2567)+\lambda_3(1457)(2367)+$$
$$+\lambda_4(1257)(3467)=0.$$
$$\lambda_1(1238)(4568)+\lambda_2(1348)(2568)+\lambda_3(1458)(2368)+$$
$$+\lambda_4(1258)(3468)=0.$$
$$\lambda_1(1239)(4569)+\lambda_2(1349)(2569)+\lambda_3(1459)(2369)+$$
$$+\lambda_4(1259)(3469)=0.$$
$$\lambda_1(1230)(4560)+\lambda_2(1340)(2560)+\lambda_3(1450)(2360)+$$
$$+\lambda_4(1250)(3460)=0.$$

melyekből a λ_1 stb. mennyiségeket kiküszöbölve, azon feltéti egyenletet nyerjük, melynél fogva az 1, 2,.......0 pontok a másodfokú felületen feküsznek. A következő jelölés mellett :

$$\Delta_{123456}=$$
$$\begin{vmatrix} (1237)(4567) & (1347)(2567) & (1457)(2367) & (1257)(3467) \\ (1238)(4568) & (1348)(2568) & (1458)(2368) & (1258)(3468) \\ (1239)(4569) & (1349)(2569) & (1459)(2369) & (1259)(3469) \\ (1230)(4560) & (1340)(2560) & (1450)(2360) & (1250)(3460) \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots(f)$$

a kérdésben forgó feltétel :

$$\Delta_{123456}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

egyenlet által van kifejezve.

Miután tíz szám közül 210-szer választhatunk ki hat különbözőt, úgy a (9) alatti egyenlet is 210 alakilag különböző egyenlet képviselője.

5. Ha az 1, 2, 3, 4, 5 pontok által meghatározott 12345 térbeli ötszögben az 512, 123, 234, 345, 451 szögöknek megfelelő síkjainak egyenletei a következők :

$$(512)=0,\ (123)=0,\ (234)=0,\ (345)=0,\ (451)=0,$$

úgy a nevezett öt ponton átmenő másodfokú felület egyenletét a következő alakban írhatjuk :

$$\lambda_1(512)(234)+\lambda_2(123)(345)+\lambda_3(234)(451)+$$
$$+\lambda_4(345)(512)+\lambda_5(451)(123)=0^{*})\ldots(7)$$

*) Lásd : G. d. D. 52. l.

és ha kifejezzük, hogy még a 6, 7, 8, 9, 0 pontok e másodfokú felületen feküsznek, úgy a következő öt feltéti egyenletet nyerjük:

$$\lambda_1 (5126)(2346) + \lambda_2 (1236)(3456) + \lambda_3 (2346)(4516) + \\ + \lambda_4 (3456)(5126) + \lambda_5 (4516)(1236) = 0.$$

$$\lambda_1 (5127)(2347) + \lambda_2 (1237)(3457) + \lambda_3 (2347)(4517) + \\ + \lambda_4 (3457)(5127) + \lambda_5 (4517)(1237) = 0.$$

$$\lambda_1 (5128)(2348) + \lambda_2 (1238)(3458) + \lambda_3 (2348)(4518) + \\ + \lambda_4 (3458)(5128) + \lambda_5 (4518)(1238) = 0.$$

$$\lambda_1 (5129)(2349) + \lambda_2 (1239)(3459) + \lambda_3 (2349)(4519) + \\ + \lambda_4 (3459)(5129) + \lambda_5 (4519)(1239) = 0.$$

$$\lambda_1 (5120)(2340) + \lambda_2 (1230)(3450) + \lambda_3 (2340)(4510) + \\ + \lambda_4 (3450)(5120) + \lambda_5 (4510)(1230) = 0.$$

melyekből a λ_1 stb. mennyiségeket kiküszöbölve, azon feltéti egyenletet nyerjük, melynél fogva az 1, 2,. . . . . . 0 pontok a másod fokú felületen feküsznek. A következő jelölés mellett:

$$\varDelta_{12345} =$$

$$\begin{vmatrix} (1256)(2346) & (1236)(3456) & (1456)(2346) & (1256)(3456) & (1236)(1456) \\ (1257)(2347) & (1237)(3457) & (1457)(2347) & (1257)(3457) & (1237)(1457) \\ (1258)(2348) & (1238)(3458) & (1458)(2348) & (1258)(3458) & (1238)(1458) \\ (1259)(2349) & (1239)(3459) & (1459)(2349) & (1259)(3459) & (1239)(1459) \\ (1250)(2340) & (1230)(3450) & (1450)(2340) & (1250)(3450) & (1230)(1450) \end{vmatrix} \ldots (7)$$

$$\varDelta_{12345} = 0 \ldots \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

a kérdésben forgó feltétel.

Miután tíz szám közül 252-szer lehet öt különbözőt kiválasztani, továbbá öt pont által 12 egyszerű ötszög van meghatározva, úgy a (8) alatti egyenlet 252.12=3024 alakilag különböző egyenlet képviselője. Ezen számra különös nyomatékot nem fektetünk, miután nem vizsgálhattuk meg, hogy ezen alakok közül nem lesznek-e többen azonosak.*)

6. Valamely tetraéder az F_2 másodfokú felületre nézve

*) A jövőben ezen megfontolásokat el is hagyjuk az itt már felhozott ok miatt.

conjugáltnak mondatik, ha csúcsai kettenként harmonikus pólusokat, vagy lapsikjai kettenként harmonikus polárissíkokat F_2-re nézve képeznek.

Valamely octaéder az F_2 másodfokú felületre nézve conjugáltnak neveztetik, ha szembenfekvő lapsíkjai harmonikus polárissíkokat képeznek F_2-re nézve.*)

»Ha tíz pontot hat és négy pontra osztunk fel és az általuk meghatározott, hexagonális octaéder és tetraéder egy másodfokú felületre nézve egyidejüleg conjugáltak, úgy a II alatti tétel megfordítása szerént a tíz pont egy másik másodfokú felületen fekszik.

E tétel segítségével a másodfokú felületen fekvő tíz pont között fennálló összefüggést egy új alakban nyerhetjük. Ha ugyanis :

$$\alpha_{11}u^2+\alpha_{22}v^2+\alpha_{33}w^2+\alpha_{44}r^2+2\alpha_{12}uv+2\alpha_{13}uw+2\alpha_{14}ur+$$
$$+2\alpha_{23}vw+2\alpha_{24}vr+2\alpha_{34}wr=0\,\ldots\ldots\ldots(9)$$

egyenlet a másodfokú felület egyenletét síkösszrendezőkben jelenti és ha továbbá az 1, 2,....9, 0 pontok a következő két csoportra.

1, 2, 3, 4, 5, 6 és
7, 8, 9, 0

osztatnak, úgy az 123456 által meghatározottt octaéder és a 7890 tetraéder az előbb megállapitott definitiók szerént a (9) alatti másodfokú felületre nézve conjugáltak, ha a következő síkpárak :

$$\left.\begin{matrix}123,\ 456\\134,\ 256\\145,\ 236\\125,\ 346\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}789,\ 780\\789,\ 790\\789,\ 890\\780,\ 790\\780,\ 890\\790,\ 890\end{matrix}\right\}$$

a (9) alatti másodfoku felületre nézve conjugált poláris-sikpárakat képeznek.

Hogy az 123 és 456 sikok a (9) alatti másodfoku felületre nézve conjugált poláris sikpárakat képeznek, az a (b)

*) G. d. D. 57. l. 71. czikk.

alatti jelölések tekintetbe vételével a következő feltéti egyenlet által fejeztetik ki:

$$\alpha_{11}\xi_{123}\xi_{456}+\alpha_{22}\eta_{123}\eta_{456}+\alpha_{33}\zeta_{123}\xi_{456}+\alpha_{44}\pi_{123}\pi_{456}+$$
$$+\alpha_{12}(\xi_{123}\eta_{456}+\xi_{456}\eta_{123})+\alpha_{13}(\xi_{123}\zeta_{456}+\xi_{456}\zeta_{123})+$$
$$+\alpha_{14}(\xi_{123}\pi_{456}+\xi_{456}\pi_{123})+\alpha_{23}(\eta_{123}\zeta_{456}+\eta_{456}\zeta_{123})+$$
$$+\alpha_{24}(\eta_{123}\pi_{456}+\eta_{456}\pi_{123})+\alpha_{34}(\zeta_{123}\pi_{456}+\zeta_{456}\pi_{123})=0.$$

Hogy a többi sík-párak is a (9) alatti felületre nézve conjugált sikpárak, arra nézve az előbbi feltételhez hasonló feltételeleket nyerünk, melyek az előbbiből pusztán a mutatók felcserélése által könnyen kiadódnak. Igy tehát egészben véve tíz feltételt nyerünk, mely feltéti egyenletek az α mennyiségekre vonalosak és egyméretűek lévén, csak úgy állhatnak meg egyidejüleg, ha

$$\Delta_{123456}^{7890}=0 \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

midőn t. i. a következő rövidített jelölést használjuk:

$$\begin{vmatrix}
\xi_{123}\xi_{456} & \eta_{123}\eta_{456} & \zeta_{123}\zeta_{456} & \pi_{123}\pi_{456} & \xi_{123}\eta_{456}+\xi_{456}\eta_{123} & \xi_{123}\zeta_{456}+\xi_{456}\zeta_{123} & \xi_{123}\pi_{456}+\xi_{456}\pi_{123} & \eta_{123}\zeta_{456}+\eta_{456}\zeta_{123} & \eta_{123}\pi_{456}+\eta_{456}\pi_{123} & \zeta_{123}\pi_{456}+\zeta_{456}\pi_{123} \\
\xi_{134}\xi_{256} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{134}\eta_{256}+\xi_{256}\eta_{134} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{145}\xi_{236} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{145}\eta_{236}+\xi_{236}\eta_{145} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{125}\xi_{346} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{125}\eta_{346}+\xi_{346}\eta_{125} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{789}\xi_{780} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{789}\eta_{780}+\xi_{780}\eta_{789} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{789}\xi_{790} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{789}\eta_{790}+\xi_{790}\eta_{789} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{789}\xi_{890} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{780}\eta_{890}+\xi_{890}\eta_{789} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{780}\xi_{790} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{780}\eta_{790}+\xi_{790}\eta_{780} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{780}\xi_{890} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{780}\eta_{890}+\xi_{890}\eta_{780} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\
\xi_{790}\xi_{890} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \xi_{790}\eta_{890}+\xi_{890}\eta_{790} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»}
\end{vmatrix} = \Delta_{123456}^{7890} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (h)$$

A (10) alatti egyenlet fejezi ki Paul Serret II. alatti tétele szerént azt, hogy az 1,. . . . . .9, 0 pontok a másod fokú felületen feküsznek. A (10) alatti egyenlet ismét több egyenlet képviselőjének tekinthető.

7. A tér öt pontja által tizenkét egyszerű térbeli ötszög van meghatározva. Ha p. az 12345 pontok e sor-rendben egyenesek által köttetnek össze, úgy az

12345

térbeli ötszög ered, melynek oldalai

12, 23, 34, 45, 51

átlói pedig :

13, 24, 35, 41, 52

és az ezen átlók végpontjainak megfelelő szögök síkjai a következők :

$$\left.\begin{matrix}512\\234\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}123\\345\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}234\\451\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}345\\512\end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix}451\\123\end{matrix}\right\}.$$

Ha tehát az 1,.......9, 0 pontokat a következő két csoportra osztjuk :

12345 és 67890.

úgy az általuk meghatározott ugyanúgy jelölt egyszerű ötszögökben az átlók végpontjainak megfelelő szögök síkjai a következők :

$$\left.\begin{matrix}512\\234\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}123\\345\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}234\\451\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}345\\512\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}451\\123\end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix}067\\789\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}678\\890\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}789\\906\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}890\\067\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}906\\678\end{matrix}\right\}$$

a melyek, ha egy és ugyanazon másodfokú vefelületre néz conjugált síkpárakat képeznek, úgy a III. alatti tétel szerént az 1,.......9, 0.pontok egy másodfokú felületen feküsznek.

Ha ismét a másodfokú felület egyenlete síkösszrendezőkben a (9) alatti egyenlet által van adva, úgy azon egyenlet, mely kifejezi, hogy az előbb emlitett tíz síkpár a (9) alatti másodfokú felületre nézve conjugált síkpárakat képeznek, kifejezi egyszersmind azt is, hogy az 1,.......9, 0 pontok egy másik másodfokú felületen feküsznek. E kérdéses feltételt pedig nyerjük, ha kifejezzük, hogy az 512 és 234 sikpárak a (9) alatti másodfokú felületre conjugált poláris sikpárak, mi a következő egyenletre vezet :

$$\left\{\begin{aligned}&\alpha_{11}\xi_{512}\xi_{234}+\alpha_{22}\eta_{512}\eta_{234}+\alpha_{33}\zeta_{512}\zeta_{234}+\alpha_{44}\pi_{512}\pi_{234}+\\&+\alpha_{12}(\xi_{512}\eta_{234}+\xi_{234}\eta_{512})+\alpha_{13}(\xi_{512}\zeta_{234}+\xi_{234}\zeta_{512})+\\&+\alpha_{14}(\xi_{512}\pi_{234}+\xi_{234}\pi_{512})+\alpha_{23}(\eta_{512}\zeta_{234}+\eta_{234}\zeta_{512})+\\&+\alpha_{24}(\eta_{512}\pi_{234}+\eta_{234}\pi_{512})+\alpha_{34}(\zeta_{512}\pi_{234}+\zeta_{234}\pi_{512})=0.\end{aligned}\right\}$$

Pusztán a mutatók felcserélése által nyerhetjük ezen egyenletből a többi egyenleteket is, melyek kifejezik, hogy a többi kilencz síkpár is a (9) alatti felületre nézve conjugált poláris sikpárak.

Ezen összesen tíz egyenletből az α mennyiségek kiküszöbölése által nyerjük azután a kérdéses feltételt, mely a III. alatti tételt szerént szintén kifejezi, hogy az 1 .... 9, 0 pontok egy másod foku felületen feküsznek. A kérdéses feltétel a következő jelölés használata mellett :

$$
\begin{vmatrix}
\xi_{512}\xi_{234} & \eta_{512}\eta_{234} & \zeta_{612}\zeta_{234} & \pi_{512}\pi_{234} & \xi_{512}\eta_{234}+\xi_{234}\eta_{512} & \xi_{512}\zeta_{234}+\xi_{234}\zeta_{512} & \xi_{512}\pi_{234}+\xi_{234}\pi_{512} & \eta_{512}\zeta_{234}+\eta_{234}\zeta_{512} & \eta_{512}\pi_{234}+\eta_{234}\pi_{512} & \zeta_{512}\pi_{234}+\zeta_{234}\pi_{512} \\
\xi_{123}\xi_{345} & » & » & » & \xi_{123}\eta_{345}+\xi_{345}\eta_{123} & » & » & » & » & » \\
\xi_{234}\xi_{451} & » & » & » & \xi_{234}\eta_{451}+\xi_{451}\eta_{234} & » & » & » & » & » \\
\xi_{345}\xi_{512} & » & » & » & \xi_{345}\eta_{512}+\xi_{512}\eta_{345} & » & » & » & » & » \\
\xi_{451}\xi_{123} & » & » & » & \xi_{451}\eta_{123}+\xi_{123}\eta_{451} & » & » & » & » & » \\
\xi_{067}\xi_{789} & » & » & » & \xi_{067}\eta_{789}+\xi_{789}\eta_{067} & » & » & » & » & » \\
\xi_{678}\xi_{890} & » & » & » & \xi_{678}\eta_{890}+\xi_{890}\eta_{678} & » & » & » & » & » \\
\xi_{789}\xi_{906} & » & » & » & \xi_{789}\eta_{906}+\xi_{906}\eta_{789} & » & » & » & » & » \\
\xi_{890}\xi_{067} & » & » & » & \xi_{890}\eta_{067}+\xi_{067}\eta_{890} & » & » & » & » & » \\
\xi_{906}\xi_{678} & » & » & » & \xi_{906}\eta_{678}+\xi_{678}\eta_{906} & » & » & » & » & »
\end{vmatrix}
=
$$

$$=\Delta^{67890}_{12345} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

ezen egyenlet által van kifejezve:

$$\Delta^{67890}_{12345}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

II.

8. Mielőtt ez értekezés második részére térnénk át, úgy czélszerű lesz néhány rövidített jelölést megmagyarázni, melyek használata mellett a kérdésben forgó átalakitások sokkal átnézetesebbek lesznek. E rövidített jelölések kivétel nélkül tizedfokú determinánsokra vonatkoznak és ezekben a következő sort:

$$x_k^2 \quad y_k^2 \quad z_k^2 \quad p_k^2 \quad x_ky_k \quad x_kz_k \quad x_kp_k \quad y_kz_k \quad y_kp_k \quad z_kp_k$$

pusztán csak

k-

-val jelöljük.

Egy ilyen sort, mint

$$x_ix_k \quad y_iy_k \quad z_iz_k \quad p_ip_k \quad x_iy_k+x_ky_i \quad x_iz_k+x_kz_i \quad x_ip_k+x_kp_i \quad y_iz_k+y_kz_i$$
$$y_ip_k+y_kp_i \quad z_ip_k+z_kp_i$$

pedig

$$i,\ k\text{-val}.$$

Ehhez hasonlóan a következő sorokat:

$$\xi^2_{ikl} \quad \eta^2_{ikl} \quad \zeta^2_{ikl} \quad \pi^2_{ikl} \quad \xi_{ikl}\eta_{ikl} \quad \xi_{ikl}\zeta_{ikl} \quad \xi_{ikl}\pi_{ikl} \quad \eta_{ikl}\zeta_{ikl} \quad \eta_{ikl}\pi_{ikl} \quad \zeta_{ikl}\pi_{ikl}$$

és

$$\xi_{ikl}\xi_{mnp}, \quad \eta_{ikl}\eta_{mnp}, \quad \zeta_{ikl}\zeta_{mnp}, \quad \pi_{ikl}\pi_{mnp}, \quad \xi_{ikl}\eta_{mnp}+\xi_{mnp}\eta_{ikl}, \quad \xi_{ikl}\zeta_{mnp}+\xi_{mnp}\zeta_{ikl},$$
$$\xi_{ikl}\pi_{mnp}+\xi_{mnp}\pi_{ikl}, \quad \eta_{ikl}\zeta_{mnp}+\eta_{mnp}\zeta_{ikl}, \quad \eta_{ikl}\pi_{mnp}+\eta_{mnp}\pi_{ikl},$$
$$\zeta_{ikl}\pi_{mnp}+\zeta_{mnp}\pi_{ikl}$$

így jelöljük:

$$i\ k\ l,$$

és

$$i\ k\ l,\ mnp.$$

Ha ezen sorok bármelyikében az ötödik tagtól kezdve egészen az utolsóig még a 2 tényező is előfordulna, úgy azt az által fogjuk láthatóvá tenni, hogy azon sor symbolumát aláhúzzuk, így p. a következő sort:

$$x_k^2 \quad y_k^2 \quad z_k^2 \quad p_k^2 \quad 2x_ky_k \quad 2x_kz_k \quad 2x_kp_k \quad 2y_kz_k \quad 2y_kp_k \quad 2z_kp_k$$

$$\underline{k}\text{-}$$

-val jelöljük.

E jelöléssel p. a (d) alatti determinánst így írjuk:

$$\left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{array}\right|$$

a (h) alatti determinánst pedig így:

123, 456
134, 256
145, 236
125, 346
789, 780
789, 790
789, 890
780, 790
780, 890
790, 890

9. Valahányszor egy determinánsnak az

$$i$$

sorát megszorozzuk, egy másik determinánsnak a

$$klm$$

sorával, úgy a szorzás eredménye az előbbi jelöléseknél fogva a következő lesz :

$$x_i^2\xi_{klm}^2+y_i^2\eta_{klm}^2+z_i^2\zeta_{klm}^2+p_i^2\pi_{klm}^2+2x_iy_i\xi_{klm}\eta_{klm}+2x_iz_i\xi_{klm}\zeta_{klm}+$$
$$+2x_ip_i\xi_{klm}\pi_{klm}+2y_iz_i\eta_{klm}\zeta_{klm}+2y_ip_i\eta_{klm}\pi_{klm}+2z_ip_i\zeta_{klm}\pi_{klm}=$$
$$=(x_i\xi_{klm}+y_i\eta_{klm}+z_i\zeta_{klm}+p_i\pi_{klm})^2=(iklm)^2\ldots.(12).$$

Valahányszor pedig valamely determinánsnak az

$$r$$

sorát megszorozzuk egy másik determinánsnak az

$$i\;k\;l,\;mnq$$

sorával, úgy a szorzás eredménye a következő :

$$x_r^2\xi_{ikl}\xi_{mnq}+y_r^2\eta_{ikl}\eta_{mnq}+z_r^2\zeta_{ikl}\zeta_{mnq}+p_r^2\pi_{ikl}\pi_{mnq}+$$
$$+x_ry_r(\xi_{ikl}\eta_{mnq}+\xi_{mnq}\eta_{ikl})+x_rz_r(\xi_{ikl}\zeta_{mnq}+\xi_{mnq}\zeta_{ikl})+$$
$$+x_rp_r(\xi_{ikl}\pi_{mnq}+\xi_{mnq}\pi_{ikl})+y_rz_r(\eta_{ikl}\zeta_{mnq}+\eta_{mnq}\zeta_{ikl})+$$
$$+y_rp_r(\eta_{ikl}\pi_{mnq}+\eta_{mnq}\pi_{ikl})+z_rp_r(\zeta_{ikl}\pi_{mnq}+\zeta_{mnq}\pi_{ikl})=$$
$$=(x_r\xi_{ikl}+y_r\eta_{ikl}+z_r\zeta_{ikl}+p_r\pi_{ikl}).$$
$$.(x_r\xi_{mnq}+y_r\eta_{mnq}+z_r\zeta_{mnq}+p_r\pi_{mnq})=(rikl)\;(rmnq)\ldots.(13)$$

könnyen beláthatni különben, hogy ezen egyenletből az előbbi is következik.

Ha továbbá valamely determinánsnak az

$$ik$$

sorát megszorozzuk egy másik dermináns

$$lmn$$

sorával, úgy a szorzás eredménye ez :

$$x_i x_k \xi^2_{lmn} + y_i y_k \eta^2_{lmn} + z_i z_k \zeta^2_{lmn} + p_i p_k \pi^2_{lmn} + (x_i y_k + x_k y_i)\xi_{lmn}\eta_{lmn} + (x_i z_k + x_k z_i)\xi_{lmn}\zeta_{lmn} + (x_i p_k + x_k p_i)\xi_{lmn}\pi_{lmn} + (y_i z_k + y_k z_i)\eta_{lmn}\zeta_{lmn} +$$
$$+ (y_i p_k + y_k p_i)\eta_{lmn}\pi_{lmn} + (z_i p_k + z_k p_i)\zeta_{lmn}\pi_{lmn} =$$
$$= (x_i \xi_{lmn} + y_i \eta_{lmn} + z_i \zeta_{lmn} + p_i \pi_{lmn})\,(x_k \xi_{lmn} + y_k \eta_{lmn} + z_k \zeta_{lmn} +$$
$$+ p_k \pi_{lmn}) = (ilmn)\,(klmn). \;..(14)$$

Ha pedig végre valamely determinánsnak egy ilyen sorát, mint

$$2x_i x_k,\; 2y_i y_k,\; 2z_i z_k,\; 2p_i p_k,\; x_i y_k + x_k y_i,\; x_i z_k + x_k z_i,\; x_i p_k + x_k p_i,$$
$$y_i z_k + y_k z_i,\; y_i p_k + y_k p_i,\; z_i p_k + z_k p_i.$$

megszorozzuk egy másik determinánsnak a következő sorával :

$$\xi_{lmn}\xi_{qrs},\; \eta_{lmn}\eta_{qrs},\; \zeta_{lmn}\zeta_{qrs},\; \pi_{lmn}\pi_{qrs},\; \xi_{lmn}\eta_{qrs} + \xi_{qrs}\eta_{lmn},$$
$$\xi_{lmn}\zeta_{qrs} + \xi_{qrs}\zeta_{lmn},\; \xi_{lmn}\pi_{qrs} + \xi_{qrs}\pi_{lmn},\; \eta_{lmn}\zeta_{qrs} + \eta_{qrs}\zeta_{lmn},$$
$$\eta_{lmn}\pi_{qrs} + \eta_{qrs}\pi_{lmn},\; \zeta_{lmn}\pi_{qrs} + \zeta_{qrs}\pi_{lmn},$$

úgy a szorzás eredménye ez :

$$2x_i x_k \xi_{lmn}\xi_{qrs} + 2y_i y_k \eta_{lmn}\eta_{qrs} + 2z_i z_k \zeta_{lmn}\zeta_{qrs} + 2p_i p_k \pi_{lmn}\pi_{qrs} +$$
$$+ (x_i y_k + x_k y_i)\,(\xi_{lmn}\eta_{qrs} + \xi_{qrs}\eta_{lmn}) +$$
$$+ (x_i z_k + x_k z_i)\,(\xi_{lmn}\zeta_{qrs} + \xi_{qrs}\zeta_{lmn}) +$$
$$+ (x_i p_k + x_k p_i)\,(\xi_{lmn}\pi_{qrs} + \xi_{qrs}\pi_{lmn}) +$$
$$+ (y_i z_k + y_k z_i)\,(\eta_{lmn}\zeta_{qrs} + \eta_{qrs}\zeta_{lmn}) +$$
$$+ (y_i p_k + y_k p_i)\,(\eta_{lmn}\pi_{qrs} + \eta_{qrs}\pi_{lmn}) +$$
$$+ (z_i p_k + z_k p_i)\,(\zeta_{lmn}\pi_{qrs} + \zeta_{qrs}\pi_{lmn}) =$$
$$= (x_i\xi_{lmn} + y_i\eta_{lmn} + z_i\zeta_{lmn} + p_i\pi_{lmn})(x_k\xi_{qrs} + y_k\eta_{qrs} + z_k\zeta_{qrs} + p_k\pi_{qrs}) +$$
$$+ (x_k\xi_{lmn} + y_k\eta_{lmn} + z_k\zeta_{lmn} + p_k\pi_{lmn})(x_i\xi_{qrs} + y_i\eta_{qrs} + z_i\zeta_{qrs} + p_i\pi_{qrs}) =$$
$$= (ilmn)\,(kqrs) + (klmn)\,(iqrs) \ldots\ldots (15).$$

10. Ezek után most már hozzá foghatunk a (2), (4), (6), (8), (10) és (11) alatti egyenletek első tagjai között létező összefüggés kipuhatolásához, vagy a mi ugyanaz : felkeressük majd a (*d*), (*e*), (*f*), (*g*), (*h*) és (*i*) alatti determinánsok között fenálló összefüggést, ebbéli vizsgálatainkat a (*d*) és (*e*) alatti determinánsok között fennálló összefüggés felkeresésével kezdvén meg.

Mielőtt különben az utóbb nevezett összefüggés felkereséséhez foghatnánk, úgy szükségesnek tartjuk előbb a következő azonos egyenletet lehozni :

$$\left|\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 1,\,2 \\ 1,\,3 \\ 1,\,4 \\ 2,\,3 \\ 2,\,4 \\ 3,\,4 \end{array}\right| = (1234)^5 \ldots (16)$$

mely czélra a bal oldalon a determinánst úgy alakitjuk át, hogy a ξ_{234}-gyel szorzott első sorhoz a $\xi_{341}, \xi_{412}, \xi_{123}$-mal szorzott 5-dik, 6-dik és 7-dik sorokat adjuk, továbbá a ξ_{341}-gyel szorzott második sorhoz a $\xi_{234}, \xi_{412}, \xi_{123}$-mal szorzott 5-dik, 8-dik és 9-dik sort adjuk, azután a ξ_{412}-vel szorzott harmadik sorhoz a ξ_{234} ξ_{341}, ξ_{123}-mal szorzott 6-dik, 8-dik és 10-dik sort adjuk, végre a ξ_{123}-mal szorzott negyedik sorhoz a $\xi_{234}, \xi_{341}, \xi_{412}$-vel szorzott 7-dik, 9-ik 10-dik sort adjuk, mely átalakitás által találjuk, hogy :

$$\left|\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 1,\,2 \\ 1,\,3 \\ 1,\,4 \\ 2,\,3 \\ 2,\,4 \\ 3,\,4 \end{array}\right| \xi_{234}\xi_{341}\xi_{412}\xi_{123} =$$

$$
= \begin{vmatrix}
x_1(1234) & 0 & 0 & 0 & y_1(1234) & z_1(1234) & p_1(1234) & 0 & 0 & 0 \\
x_2(1234) & 0 & 0 & 0 & y_2(1234) & z_2(1234) & p_2(1234) & 0 & 0 & 0 \\
x_3(1234) & 0 & 0 & 0 & y_3(1234) & z_3(1234) & p_3(1234) & 0 & 0 & 0 \\
x_4(1234) & 0 & 0 & 0 & y_4(1234) & z_4(1234) & p_4(1234) & 0 & 0 & 0 \\
x_1x_2 & y_1y_2 & z_1z_2 & p_1p_2 & x_1y_2+x_2y_1 & x_1z_2+x_2z_1 & x_1p_2+x_2p_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1p_2+y_2p_1 & z_1p_2+z_2p_1 \\
x_1x_3 & y_1y_3 & z_1z_3 & p_1p_3 & x_1y_3+x_3y_1 & x_1z_3+x_3z_1 & x_1p_3+x_3p_1 & y_1z_3+y_3z_1 & y_1p_3+y_3p_1 & z_1p_3+z_3p_1 \\
x_1x_4 & y_1y_4 & z_1z_4 & p_1p_4 & x_1y_4+x_4y_1 & x_1z_4+x_4z_1 & x_1p_4+x_4p_1 & y_1z_4+y_4z_1 & y_1p_4+y_4p_1 & z_1p_4+z_4p_1 \\
x_2x_3 & y_2y_3 & z_2z_3 & p_2p_3 & x_2y_3+x_3y_2 & x_2z_3+x_3z_2 & x_2p_3+x_3p_2 & y_2z_3+y_3z_2 & y_2p_3+y_3p_2 & z_2p_3+z_3p_2 \\
x_2x_4 & y_2y_4 & z_2z_4 & p_2p_4 & x_2y_4+x_4y_2 & x_2z_4+x_4z_2 & x_2p_4+x_4p_2 & y_2z_4+y_4z_2 & y_2p_4+y_4p_2 & z_2p_4+z_2p_4 \\
x_3x_4 & y_3y_4 & z_3z_4 & p_3p_4 & x_3y_4+x_4y_3 & x_3z_4+x_4z_3 & x_3p_4+x_4p_3 & y_3z_4+y_4z_3 & y_3p_4+y_4p_3 & z_3p_4+z_4p_3
\end{vmatrix}
$$

$$
= -(1234)^5 \begin{vmatrix}
y_1y_2 & z_1z_2 & p_1p_2 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1p_2+y_2p_1 & z_1p_2+z_2p_1 \\
y_1y_3 & z_1z_3 & p_1p_3 & y_1z_3+y_3z_1 & y_1p_3+y_3p_1 & z_1p_3+z_3p_1 \\
y_1y_4 & z_1z_4 & p_1p_4 & y_1z_4+y_4z_1 & y_1p_4+y_4p_1 & z_1p_4+z_4p_1 \\
y_2y_3 & z_2z_3 & p_2p_3 & y_2z_3+y_3z_2 & y_2p_3+y_3p_2 & z_2p_3+z_3p_2 \\
y_2y_4 & z_2z_4 & p_2p_4 & y_2z_4+y_4z_2 & y_2p_4+y_4p_2 & z_2p_4+z_4p_2 \\
y_3y_4 & z_3z_4 & p_3p_4 & y_3z_4+y_4z_3 & y_3p_4+y_4p_3 & z_3p_4+z_4p_3
\end{vmatrix}
$$

miután pedig az utóbbi determináns értéke:

$$
-\,\xi_{234}\cdot\xi_{341}\cdot\xi_{412}\cdot\xi_{123}\cdot{}^{*)}
$$

---

*) Lásd a »Műegyetemi lapok« II. köt. 256. és 310. lapját. Éppen ezen vizsgálatok inditották szerzőt e feladat kitüzésére.

úgy az egyenlő tényezők elhagyása után a (16) alatti azonos egyenletet nyerjük.

11. Ha továbbá a (16) alatti egyenlet első tagjában az

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1, & p_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & p_2 \\ x_3, & y_3, & z_3, & p_3 \\ x_4, & y_4, & z_4, & p_4 \end{matrix}$$

mennyiségeket a következők által pótoljuk:

$$\begin{matrix} \xi_{234}, & \eta_{234}, & \zeta_{234}, & \pi_{234} \\ \xi_{341}, & \eta_{341}, & \zeta_{341}, & \pi_{341} \\ \xi_{412}, & \eta_{412}, & \zeta_{412}, & \pi_{412} \\ \xi_{123}, & \eta_{123}, & \zeta_{123}, & \pi_{123} \end{matrix}$$

úgy a nevezett helyettesitéseknél fogva a (16) alatti egyenlet második tagja a következőbe megy át:

$$\begin{vmatrix} \xi_{234} & \eta_{234} & \zeta_{234} & \pi_{234} \\ \xi_{341} & \eta_{341} & \zeta_{341} & \pi_{341} \\ \xi_{412} & \eta_{412} & \zeta_{412} & \pi_{412} \\ \xi_{123} & \eta_{123} & \zeta_{123} & \pi_{123} \end{vmatrix}^5$$

ámde az adjungált determinánsok ismeretes tételénél fogva:

$$\begin{vmatrix} \xi_{234} & \eta_{234} & \zeta_{234} & \pi_{234} \\ \xi_{341} & \eta_{341} & \zeta_{341} & \pi_{341} \\ \xi_{412} & \eta_{412} & \zeta_{412} & \pi_{412} \\ \xi_{123} & \eta_{123} & \zeta_{123} & \pi_{123} \end{vmatrix} = (1234)^3 \text{ *)}$$

úgy végre találjuk, hogy:

$$\left|\begin{array}{c} 234 \\ \hline 341 \\ \hline 412 \\ \hline 123 \\ \hline 234,\ 341 \\ 234,\ 412 \\ 234,\ 123 \\ 341,\ 412 \\ 341,\ 123 \\ 412,\ 123 \end{array}\right| = (1234)^{15} \quad \ldots\ldots (17)$$

*) Lásd. Baltzer »Theorie und Anwend. der Determinanten« 3 kiadásában, §. 6, 1.

12. Ha a (d) alatti determinánst a (17) alattival megszorozzuk, úgy a szorzás eredménye a következő lesz:

$$\Delta\,(1234)^{15} = \left|\begin{array}{c||c} 1 & 234 \\ \cline{2-2} 2 & 341 \\ \cline{2-2} 3 & 412 \\ \cline{2-2} 4 & 123 \\ \cline{2-2} 5 & 234,\ 341 \\ 6 & 234,\ 412 \\ 7 & 234,\ 123 \\ 8 & 341,\ 412 \\ 9 & 341,\ 123 \\ 0 & 412,\ 123 \end{array}\right|$$

vagy ha a jobb oldalon álló determinánsokat egymással megszorozzuk és a 9. szám (12) és (13) alatti egyenleteit vesszük tekintetbe, úgy még továbbá:

$$
\Delta(1234)^{15} = \begin{vmatrix}
(1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (1234)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(2345)^2 & (3415)^2 & (4125)^2 & (1235)^2 & (2345)(3415) & (2345)(4125) & (2345)(1235) & (3415)(4125) & (3415)(1235) & (4125)(1235) \\
(2346)^2 & (3416)^2 & (4126)^2 & (1236)^2 & (2346)(3416) & (2346)(4126) & (2346)(1236) & (3416)(4126) & (3416)(1236) & (4126)(1236) \\
(2347)^2 & (3417)^2 & (4127)^2 & (1237)^2 & (2347)(3417) & (2347)(4127) & (2347)(1237) & (3417)(4127) & (3417)(1237) & (4127)(1237) \\
(2348)^2 & (3418)^2 & (4128)^2 & (1238)^2 & (2348)(3418) & (2348)(4128) & (2348)(1238) & (3418)(4128) & (3418)(1238) & (4128)(1238) \\
(2349)^2 & (3419)^2 & (4129)^2 & (1239)^2 & (2349)(3419) & (2349)(4129) & (2349)(1239) & (3419)(4129) & (3419)(1239) & (4129)(1239) \\
(2340)^2 & (3410)^2 & (4120)^2 & (1230)^2 & (2340)(3410) & (2340)(4120) & (2340)(1230) & (3410)(4120) & (3410)(1230) & (4120)(1230)
\end{vmatrix}
$$

vagy még :

$$
\Delta(1234)^{15} = (1234)^8 \begin{vmatrix}
(2345)(3415) & (2345)(4125) & (2345)(1235) & (3415)(4125) & (3415)(1235) & (4125)(1235) \\
(2346)(3416) & (2346)(4126) & (2346)(1236) & (3416)(4126) & (3416)(1236) & (4126)(1236) \\
(2347)(3417) & (2347)(4127) & (2347)(1237) & (3417)(4127) & (3417)(1237) & (4127)(1237) \\
(2348)(3418) & (2348)(4128) & (2348)(1238) & (3418)(4128) & (3418)(1238) & (4128)(1238) \\
(2349)(3419) & (2349)(4129) & (2349)(1239) & (3419)(4129) & (3419)(1239) & (4129)(1239) \\
(2340)(3410) & (2340)(4120) & (2340)(1230) & (3410)(4120) & (3410)(1230) & (4120)(1230)
\end{vmatrix}
$$

vagy az (*e*) alatti jelölés tekintetbe vételével :

$$
\Delta(1234)^7 = \Delta_{1234} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)
$$

mely egyenlet kifejezi a (*d*) és (*e*) alatti determinánsok között létező összefüggést.

13. Hogy a *(d)* és *(f)* alatti determinánsok között létező összefüggést kipuhatolhassuk úgy először a következő determináns értékét határozzuk meg:

$$\begin{vmatrix} 123, & 456 \\ 134, & 256 \\ 145, & 236 \\ 125, & 346 \\ 236, & 456 \\ 134, & 456 \\ 125, & 456 \\ 123, & 256 \\ 123, & 346 \\ 123, & 145 \end{vmatrix} = R \ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

mely czélból ezt a (16) alatti determinánssal megszorozzuk, ha az utóbbit úgy alakitjuk át, hogy abban az első négy oszlopot 2-vel megszorozzuk és az első négy sort 2-vel elosztjuk, mi által annak értéke nem változik és a (16) alatti egyenlet, a következő alakot veszi fel:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & p_1^2 & x_1y_1 & x_1z_1 & x_1p_1 & y_1z_1 & y_1p_1 & z_1p_1 \\ x_2^2 & . & . & . & x_2y_2 & . & . & . & . & . \\ x_3^2 & . & . & . & x_3y_3 & . & . & . & . & . \\ x_4^2 & . & . & . & x_4y_4 & . & . & . & . & . \\ 2x_1x_2 & 2y_1y_2 & 2z_1z_2 & 2p_1p_2 & x_1y_2+x_2y_1 & . & . & . & . & . \\ 2x_1x_3 & . & . & . & x_1y_3+x_3y_1 & . & . & . & . & . \\ 2x_1x_4 & . & . & . & x_1y_4+x_4y_1 & . & . & . & . & . \\ 2x_2x_3 & . & . & . & x_2y_3+x_3y_2 & . & . & . & . & . \\ 2x_2x_4 & . & . & . & x_2y_4+x_4y_2 & . & . & . & . & . \\ 2x_3x_4 & . & . & . & x_3y_4+x_4y_3 & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = (1234)^5$$

A szorzás eredménye a (13) és (15) alatti egyenleteket tekíntetbe véve, a következő lesz:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4123)(1456) & 0 & (4123)(2456) & (4123)(3456) \\
0 & 0 & 0 & 0 & (2134)(1256) & 0 & 0 & (2134)(3256) & (2134)(4256) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & (2145)(1236) & (3145)(1236) & 0 & 0 & (2145)(4236) & (3145)(4236) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (3125)(1346) & (4125)(1346) & (3125)(2346) & (4125)(2346) & 0 \\
(1236)(1456) & 0 & 0 & 0 & (1236)(2456) & (1236)(3456) & (4236)(1456) & 0 & (4236)(2456) & (4236)(3456) \\
0 & (2134)(3456) & 0 & 0 & (2134)(1456) & 0 & 0 & (2134)(3456) & 0 & 0 \\
0 & 0 & (3125)(3456) & 0 & 0 & (3125)(1456) & (4125)(1456) & (3125)(2456) & (4125)(2456) & (4125)(3456) \\
0 & 0 & 0 & (4123)(4256) & 0 & 0 & (4123)(1256) & 0 & 0 & (4123)(3256) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4123)(1346) & 0 & (4123)(2346) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4123)(2145) & (4123)(3145)
\end{vmatrix}$$

$$= (1234)^5 \; R$$

Miután az előttünk lévő determináns 1. 2. 3. 4. 9. és 10. sorában az első négy oszlop eltünik, úgy e tized fokú determináns egy negyedfokú és egy hatodfokú determináns szorzatára redukálható, az ily módon keletkezett negyedfokú determináns a diagonál-sorára redukálódik, a hatodfokú determináns pedig ismét két harmadfokú determináns szorzatából áll, ha ezt a kérdésben forgó determinánson mind végrehajtjuk, úgy némi kisebb reductio után találjuk, hogy :

$$(1234)^6 (1235)^2 (1236)^2 (2456)^2 (1456)(3456).$$

$$\begin{vmatrix} (1456) & (2456) & (3456) \\ (1346) & (2346) & 0 \\ 0 & (1245) & (1345) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -(1256) & 0 & (2356) \\ (1245) & (1345) & 0 \\ 0 & (1346) & (2346) \end{vmatrix} = (1234)^5 R \ldots (19)$$

Ezen determinánsok közöl az első, azaz a következő:

$$\begin{vmatrix} (1456) & (2456) & (3456) \\ (1346) & (2346) & 0 \\ 0 & (1245) & (1345) \end{vmatrix} = -(1234)(1456)(3456) \ldots\ldots (20)$$

a mit úgy fogunk bebizonyitani, hogy a következő determinánst:

$$\begin{vmatrix} \xi_{123} & \eta_{123} & \zeta_{123} & \pi_{123} \\ \xi_{456} & \eta_{456} & \zeta_{456} & \pi_{456} \\ \xi_{145} & \eta_{145} & \zeta_{145} & \pi_{145} \\ \xi_{346} & \eta_{346} & \zeta_{346} & \pi_{346} \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (l)$$

egyszer

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & p_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & p_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & p_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & p_4 \end{vmatrix}$$

determinánssal, másszor pedig

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & p_1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & p_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & p_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \end{vmatrix}$$

determinánssal szorozzuk, úgy találjuk, hogy az első esetben az (l) alatti determináns egyenlő a (20) alatti egyenlet első tagjával, a második esetben pedig az (l) alatti determináns egyenlő a (20) alatti egyenlet második tagjával, miből a (20) alatti egyenlet helyessége következik, melynek tekintetbe vételével a (19) alatti egyenlet az egyenlő tényezők elhagyása után a következőbe megy át:

$$\left.\begin{aligned} R=&(1234)^2(1235)^2(1236)^2(1456)^2(2456)^2(3456)^2. \\ .&\{(1235)(1346)(2356)-(1256)(1345)(2346)\} \end{aligned}\right\} . (21)$$

14. Ha a (d) alatti determinánst, a (k) alattival megszorozzuk, úgy találjuk, hogy:

$$\Delta R = (1234)^2(1235)^2(1236)^2(1456)^2(2456)^2(3456)^2 \begin{vmatrix} (1237)(4567) & (1347)(2567) & (1457)(2367) & (1257)(3467) \\ (1238)(4568) & (1348)(2568) & (1458)(2368) & (1258)(3468) \\ (1239)(4569) & (1349)(2569) & (1459)(2369) & (1259)(3469) \\ (1230)(4560) & (1340)(2560) & (1450)(2360) & (1250)(3460) \end{vmatrix}$$

a mely egyenlet a (21) alatti egyenlet és az (f) alatti jelölés tekintetbe vételével az egyenlő tényezők elhagyása után a következő egyenletre vezet :

$$\Delta \{(1245)(1346)(2356)-(1256)(1345)(2346)\}=\Delta_{123456} \quad .(22)$$

mely utóbbi egyenlet a *(d)* és *(f)* alatti determinánsok között létező összefüggést világosan kimutatja.

15. A Δ és Δ_{12345} determinánsok között létező összefüggés megvizsgálására ismét néhány azonos egyenletet kell levezetnünk.

Legyen a következő determináns :

$$\begin{vmatrix} 234 \\ 341 \\ 412 \\ 123 \\ 125 \\ 135 \\ 145 \\ 235 \\ 245 \\ 345 \end{vmatrix} = S \,.........\, (m)$$

úgy S értékét a (18) alatti egyenletből fogjuk meghatározni, ha abban az

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & p_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & p_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & p_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & p_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & p_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 & p_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 & p_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 & p_8 \\ x_9 & y_9 & z_9 & p_9 \\ x_0 & y_0 & z_0 & p_0 \end{matrix}$$

mennyiségeket a következők által pótoljuk :

$$\begin{array}{llll}
\xi_{234} & \eta_{234} & \zeta_{234} & \pi_{234} \\
\xi_{341} & \eta_{341} & \zeta_{341} & \pi_{341} \\
\xi_{412} & \eta_{412} & \zeta_{412} & \pi_{412} \\
\xi_{123} & \eta_{123} & \zeta_{123} & \pi_{123} \\
\xi_{125} & \eta_{125} & \zeta_{125} & \pi_{125} \\
\xi_{135} & \eta_{135} & \zeta_{135} & \pi_{135} \\
\xi_{145} & \eta_{145} & \zeta_{145} & \pi_{145} \\
\xi_{235} & \eta_{235} & \zeta_{235} & \pi_{235} \\
\xi_{245} & \eta_{245} & \zeta_{245} & \pi_{245} \\
\xi_{345} & \eta_{345} & \zeta_{345} & \pi_{345}
\end{array}$$

mely helyettesitések által a nevezett egyenletben Δ S-be $\frac{\Delta_{1234}}{(1234)^7}$ pedig, ha a magukat előadó számos, de nem nehéz számításokat végrehajtjuk és a determinánst kifejtjük, a következő szorzatba megy át:

$$(2345)^3(3451)^3(4512)^3(5123)^3(1234)^3$$

úgy hogy

$$S=(2345)^3(3451)^3(4512)^3(5123)^3(1234)^3 \quad \ldots (23).$$

16. A következő determináns:

$$T = \begin{vmatrix} 15 \\ 25 \\ 35 \\ 45 \\ 34 \\ 24 \\ 23 \\ 14 \\ 13 \\ 12 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots (n)$$

értékének meghatározása miatt ezt az (m) alatti determinánssal megszorozzuk, mi által találjuk, hogy

$$TS = (2345)^4(3451)^4(4512)^4(5123)^4(1234)^4$$

vagy ha S értékét a (23) alatti egyenletből helyettesitjük, úgy:

$$T = (2345)(3451)(4512)(5123)(1234) \quad \ldots\ldots (24)$$

Ha pedig végre

$$U=\begin{vmatrix} 125, 145 \\ 123, 145 \\ 234, 145 \\ 345, 145 \\ 234, 345 \\ 123, 345 \\ 123, 234 \\ 125, 345 \\ 125, 234 \\ 125, 123 \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (p)$$

úgy az előttünk lévő determináns értékét a (24) alatti egyenletből határozzuk meg, ha abban az

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & p_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & p_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & p_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & p_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 & p_5 \end{matrix}$$

mennyiségeket a következők által pótoljuk:

$$\begin{matrix} \xi_{125} & \eta_{125} & \zeta_{125} & \pi_{125} \\ \xi_{123} & \eta_{123} & \zeta_{123} & \pi_{123} \\ \xi_{234} & \eta_{234} & \zeta_{234} & \pi_{234} \\ \xi_{345} & \eta_{345} & \zeta_{345} & \pi_{345} \\ \xi_{145} & \eta_{145} & \zeta_{145} & \pi_{145} \end{matrix}$$

mely helyettesitések által T, U-ba megy át és találjuk, hogy:

$$U=(2345)^3(3451)^3(4512)^3(5123)^3(1234)^3 \ldots\ldots\ldots (25)$$

17. Az U determináns segitségével képesek leszünk a (d) alatti determinánst úgy átalakitani, hogy a (d) és (g) alatti determinánsok között létező összefüggés világosan ki fog tünni.

Szorozzuk meg a nevezett czélból a Δ determinánst a (p) alatti determinánssal, úgy a szorzás eredménye némi könnyebb reductio után a következő egyenletre vezet:

$$
\varDelta\, U = -(2345)^2\,(3451)^2\,(4512)^2\,(5123)^2\,(1234)^2 .
\begin{vmatrix}
(1256)(2346) & (1236)(3456) & (1456)(2346) & (1256)(3456) & (1236)(1456) \\
(1257)(2347) & (1237)(3457) & (1457)(2347) & (1257)(3457) & (1237)(1457) \\
(1258)(2348) & (1238)(3458) & (1458)(2348) & (1258)(3458) & (1238)(1458) \\
(1259)(2349) & (1239)(3459) & (1459)(2349) & (1259)(3459) & (1239)(1459) \\
(1250)(2340) & (1230)(3450) & (1450)(2340) & (1250)(3450) & (1230)(1450)
\end{vmatrix}
$$

mely még, ha U értékét a (25) alatti egyenletből helyettesitjük és a (g) alatti jelölést figyelembe vesszük a következőbe megy át:

$$\varDelta_{12345} = -(2345)(3451)(4512)(5123)(1234)\,\varDelta \quad \ldots\ldots (26)$$

mely egyenlet által a kivánt összefüggés meg van állapitva.

18. Hogy a $\varDelta$ és a $\varDelta^{7890}_{123456}$ determinánsok között fennálló összefüggést kipuhatolhassuk, úgy a (h) alatti determinánst, melyet a 8. számban használt jelöléseknél fogva a következőképen irhatni

$$
\begin{vmatrix}
123,\ 456 \\
134,\ 256 \\
145,\ 236 \\
125,\ 346 \\
789,\ 780 \\
789,\ 790 \\
789,\ 890 \\
780,\ 790 \\
780,\ 890 \\
790,\ 890
\end{vmatrix}
$$

a (d) alatti determinánssal, melyet ugyanazon számban felhozott jelöléseknél fogva így irhatni:

$$
\begin{vmatrix}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0
\end{vmatrix}
$$

megszorozzuk, mi által ered :

$$\varDelta^{78\,0}_{123456}\,\varDelta = \left|\begin{array}{c||c} 123,\ 456 & 1 \\ 134,\ 256 & 2 \\ 145,\ 236 & 3 \\ 125,\ 346 & 4 \\ 789,\ 780 & 5 \\ 789,\ 790 & 6 \\ 789,\ 890 & 7 \\ 780,\ 790 & 8 \\ 780,\ 890 & 9 \\ 790,\ 890 & 0 \end{array}\right|$$

vagy ha a jobb oldalon álló determinánsokat egymással megszorozzuk és a szorzás által eredő tizedfokú determinánsban észrevesszük, hogy az egy negyed- és egy hatod-fokú determináns szorzatára felbontható, úgy még továbbá :

$$\Delta_{123456}^{7890}\Delta = \begin{vmatrix} (1237)(4567) & (1347)(2567) & (1457)(2367) & (1257)(3467) \\ (1238)(4568) & (1348)(2568) & (1458)(2368) & (1258)(3468) \\ (1239)(4569) & (1349)(2569) & (1459)(2369) & (1259)(3469) \\ (1230)(4560) & (1340)(2560) & (1450)(2360) & (1250)(3460) \end{vmatrix} .$$

$$\cdot \begin{vmatrix} (7891)(7801) & (7891)(7901) & (7891)(8901) & (7801)(7901) & (7801)(8901) & (7901)(8901) \\ (7892)(7802) & (7892)(7902) & (7892)(8902) & (7802)(7902) & (7802)(8902) & (7902)(8902) \\ (7893)(7803) & (7893)(7903) & (7893)(8903) & (7803)(7903) & (7803)(8903) & (7903)(8903) \\ (7894)(7804) & (7894)(7904) & (7894)(8904) & (7804)(7904) & (7804)(8904) & (7904)(8904) \\ (7895)(7805) & (7895)(7905) & (7895)(8905) & (7805)(7905) & (7805)(8905) & (7905)(8905) \\ (7896)(7806) & (7896)(7906) & (7896)(8906) & (7806)(7906) & (7806)(8906) & (7906))8906) \end{vmatrix}$$

Miután az egyenlet jobb oldalán álló determinánsok közül az első a (22) alatti egyenletnél fogva :

$$= \Delta \{(1245)(1346)(2356) - (1256)(1345)(2346)\}$$

a második pedig a (18) alatti egyenlethez hasonlóan

$$= \Delta(7890)^7$$

azért az előbbi egyenletet az egyenlő tényezők elhagyása után még így írhatjuk :

$$\Delta_{123456}^{7890} = \Delta \{(1245)(1346)(2356) - (1256)(1345)(2346)\} (7890)^7 \ldots\ldots\ldots (27)$$

mely egyenlet a Δ_{123456}^{7890} és Δ determinánsok között fennálló összefüggést világosan kimutatja.

19. Az *(i)* és *(d)* alatti determinánsok között fennálló összefüggést hasonló módon fogjuk kipuhatolhatni, mint azt a (*h*) és (*d*) determinánsokra nézve tettük

Az i alatti determinánst a 8-dik számban megállapitott jelöléseknél fogva a következőképen irhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 512,\ 234 \\ 123,\ 345 \\ 234,\ 451 \\ 345,\ 512 \\ 451,\ 123 \\ 067,\ 789 \\ 678,\ 890 \\ 789,\ 906 \\ 890,\ 067 \\ 906,\ 678 \end{vmatrix}$$

a melyet ismét a $\varDelta$ determinánssal megszorozva lesz:

$$\varDelta_{12345}^{67890}\varDelta = \begin{vmatrix} 512,\ 234 \\ 123,\ 345 \\ 234,\ 451 \\ 345,\ 512 \\ 451,\ 123 \\ 067,\ 789 \\ 678,\ 890 \\ 789,\ 906 \\ 890,\ 067 \\ 906,\ 678 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{vmatrix}$$

vagy ha a szorzást végrehajtjuk és megjegyezzük, hogy az ilyként eredő tizedfokú determináns két ötödfokú determináns szorzatából áll, úgy még továbbá:

$$\varDelta_{12345}^{67890}\varDelta =$$

$$- \begin{vmatrix} (1256)(2346) & (1236)(3456) & (1456)(2346) & (1256)(3456) & (1236)(1456) \\ (1257)(2347) & (1237)(3457) & (1457)(2347) & (1257)(3457) & (1237)(1457) \\ (1258)(2348) & (1238)(3458) & (1458)(2348) & (1258)(3458) & (1238)(1458) \\ (1259)(2349) & (1239)(3459) & (1459)(2349) & (1259)(3459) & (1239)(1459) \\ (1250)(2340) & (1230)(3450) & (1450)(2340) & (1250)(3450) & (1230)(1450) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1670)(1789) & (1678)(1890) & (1789)(1690) & (1890)(1670) & (1690)(1678) \\ (2670)(2789) & (2678)(2890) & (2789)(2690) & (2890)(2670) & (2690)(2678) \\ (3670)(\ 789) & (3678)(3890) & (3789)(3690) & (\ 890)(3670) & (3690)(3678) \\ (4670)(4789) & (4678)(4890) & (4789)(4690) & (4890)(4670) & (4690)(4678) \\ (5670)(5789) & (5678)(5890) & (5789)(5690) & (5890)(5670) & (5690)(5678) \end{vmatrix}$$

mely egyenletben a jobb oldalon álló determinánsok közül az első a (26) alatti egyenletnél fogva

$$= -(2345)(3451)(4512)(5123)(1234)\,\Delta$$

a másodikról pedig hasonlóan találjuk, hogy az

$$= -(7890)(8906)(9067)(0678)(6789)\,\Delta$$

ha ezen értékeket az előbbi egyenletbe helyettesitjük, úgy az egyenlő tényezők elhagyása után végre találjuk, hogy

$$\left.\Delta^{67890}_{12345} = -\frac{(2345)(3451)(4512)(5123)(1234)}{(7890)(8906)(9067)(0678)(6789)\,\Delta}\right\}\ldots\ldots\ldots(28)$$

mely egyenlet a Δ^{67890}_{12345} és Δ között létező összefüggést kifejezi.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet.

I. Szily Kálmán. A mechanikai hő-elmélet egyenleteinek általános alakjáról. Székfoglaló . . . . 10 kr.
II. Hunyady Jenő. A pólus és a polárok. A viszonyos polárok elve 20 kr.
III. Vész János A. Biztositási kölcsön (új életbiztositási nem) . . 20 kr.
IV. Kruspér István. A Schwerdt-féle Comparator módositott alkalmazása 10 kr.
V. Vész János A. Legrövidebb távolok a körkúpon. Székfoglaló . 10 kr.
VI. Tóth Ágoston. Az európai nemzetközi fokmérés és a körébe tartozó goedaetai munkálatok . . . . 20 kr.
VII. Kruspér István. A párisi meter-prototyp . . . . . . 10 kr.
VIII. König Gyula. Az elliptikai függvényeк alkalmazásáról a magasabb foku egyenletek elméletére . . . . 20 kr.
IX. Murmann Ágost. Európa bólygó elemei, annak tiz első észlelt szembenállása szerint . . . . 20 kr.
X. Szily Kálmán. A Hamilton-féle elv és a mechanikai hő-elmélet második fő tétele . . . . 10 kr.
XI. Tóth Ágoston. A földképkészités jelen állása, a mint az képviselve volt az antwerpeni kiállitáson. Két táblával . . . . 20 kr.

Második kötet.

I. Murmann Ágost. Freia bolygó feletti értekezés . . . . 30 kr.
II. Kruspér István. A comparatorokról . . . . 10 kr.
III. Kruspér István. A vonásos hosszmértékek összehasonlitása folyadékban . . . . 10 kr.
IV. Feszt V. A közlekedési müvek és vonalok . . . . 20 kr.
V. Murman A. Az 1861. nagy üstökös pályájának meghatározása 20 kr.
VI. Kruspér J. A párisi levéltári méter-rúd . . . . 10 kr.

Harmadik kötet.

I. Vész János Ármin. Adalék a visszafutó sorok elméletéhez. . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Az ó-gyallai csillagda leirása s abban történt napfoltok észlelése néhány spectroscopicus észlelés töredékeivel. 1872. és 1873. Három táblával. . . . . 40 kr.
III. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Herschel János k. tag fölött . 10 kr.
IV. B. Eötvös Loránd. A rezgések intenzitása, tekintettel a rezgésforrásnak és az észlelőnek mozgására . . . . 10 kr.
V. Réthy Mór. A Diffractio elméletéhez . . . . . . 12 kr.
VI. Martin Lajos. Az erömütani csavarfelületek. — A vízszintes szélkerék elmélete. Két értekezés . . . . 1 frt
VII. Réthy Mór. A kerületre redukálható felület-egészletek elméletéhez 15 kr.
VIII. Galgóczy Károly. Emlékbeszéd Vállas Antal k. tag felett. 10 kr.

Negyedik kötet.

I. Schulhof Lipót. Az 1870. IV. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása 10 kr.
II. Schulhof Lipót. Az 1871. II. sz. Üstökös definitiv pályaszámitása. 10 kr.
III. Szily Kálmán. A hő elmélet második főtétele, levezetve az elsőből 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. Csillagászati megfigyeléseim 1874 és 1875-ben. 50 kr.

V. Konkoly Miklós. Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagdában. 40 kr.
VI. Hunyadi Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól . . . . 20 kr.
VII. Réthy Mór. A három méretü homogén tér (u. n. nem euklidikus) siktani trigonometriája. . . . . 20 kr.
VIII. Réthy Mór. A propeller és peripeller felületek elméletéhez. . 30 kr.
IX. Fest Vilmos. Temesi Reitter Ferencz emléke . . . . . 10 kr.

Ötödik kötet.

I. Kondor Gusztáv. Emlékbeszéd Nagy Károly r. tag felett . . 10 kr.
II. Kenessey Albert. Adatok folyóink vizrajzi ismeretéhez . . 20 kr.
III. Dr. Hoitsy Pál. Csillag-észlelés a kelet-nyugot vonalban (egy számtáblával.) . . . . 30 kr.
IV. Hunyady Jenő. A kúpszeleten fekvő hat pont feltételi egyenletének különböző alakjairól. (Folytatás a IV. kötetben ugyane czim alatt megjelent értekezésnek.) . . . . 10 kr.
V. Hunyady Jenő. Apollonius feladata a gömbfelületen . . . 10 kr.
VI. Dr. Gruber Lajos. 24η Cassiopeiae kettős csillag mozgásáról . 10 kr.
VII. Martin Lajos. A változtatási hánylat alkalmazása a propeller-fölület egyenletének lefejtésére. . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. A teljes holdfogyatkozás 1877. február 27-én és az 1877. (Borelli) I. számu üstökös szinképének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.
IX. Konkoly Miklós. A napfoltok s a nap felületének kinézése 1876-ban (három képtáblával.) . . . . 40 kr.
X. Konkoly Miklós. 160 álló csillag szinképe. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1876 ban . . . . 20 kr.

Hatodik kötet.

I. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. I. rész. 1871—1873. Ára . . . . 20 kr.
II. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára . . . . 20 kr.
III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámítása. Közlik dr. Gruber Lajos és Kurländer Ignácz kir. observatorok. 10 kr.
IV. Schenzl Guido. Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. . . . . 20 kr.
V. Gruber Lajos. A november-havi hullócsillagokról . . . . 20 kr.
VI. Konkoly Miklós. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára . . . . 20 kr.
VII. Konkoly Miklós. A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára . . . . 20 kr.
VIII. Konkoly Miklós. Mercur átvonulása a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án . . . . 10 kr.

Hetedik kötet.

I. Konkoly Miklós. Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. . . . . . . 10 kr.
II. Konkoly Miklós. Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr.
III. Konkoly Miklós. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban. IV. rész. Ára . . . . 10 kr.
IV. Konkoly Miklós. A nap felületének megfigyelése 1878-ban az ó-gyallai csillagdán. . . . . 10 kr.

Budapest, 1879. Az Athenaeum r. társ. könyvnyomdája.